NOVEMBER/DECEMBER 2025

FMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.



1. State any two properties of a group.

ஒரு குலத்தின் ஏதேனும் இரண்டு பண்புகளைக் குறிப்பிடுக.

2. In a group G, prove that an element $a \in G$ such that $a^2 = e, a \neq e,$ iff $a = a^{-1}$.

$a \in G$ என்ற உறுப்பானது $a^2 = e, a \neq e,$ ஆக ஒரு குலத்தில் இருக்கத் தேவையானப் போதுமான நிபந்தனை $a = a^{-1}$ என நிறுவுக.

3. Define homomorphism.

செயல்மாறாக் கோர்த்தல் வரையறு.

4. Prove that every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.

பரிமாற்றுக் குலத்தின் ஒவ்வொரு உட்குலமும் ஒரு நேர்மை உட்குலமாகும் என நிறுவுக.

5. Is the permutation $p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$ even or odd.

$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$ இந்த வரிசைமாற்றமானது இரட்டைப்படையா அல்லது ஒற்றைப்படையா?

6. Define automorphism.

தன் ஒப்புமை மாறாக் கோர்த்தல் வரையறுக்க.

7. State the condition of a ring to be a ring homomorphism.

ஒரு வளையம் ஒரு வளைய செயல்மாறாக் கோர்த்தலுக்கான நிபந்தனையைக் கூறுக.



8. Define ring with an example.

ஒரு உதாரணத்துடன் வளையத்தை வரையறுக்க.

9. Give an example of a ring which is not a field?

களம் அல்லாத வளையத்திற்கு உதாரணம் கொடுங்கள்.

10. Define quotient ring.

பகுவளையத்தை வரையறுக்கவும்.

19. If 'R' be a commutative ring with unity, whose ideals are $\{0\}$ and R, then is prove that R is a field.

அலகு உறுப்புடன் பரிமாற்றப் பண்புடைய வளையம் 'R' ன் சீர்மங்கள் $\{0\}$ மற்றும் R, எனில் R என்பது களம் என்பதை நிறுவுக.

20. Prove that the set Z_u = {[0], [1], [2], [3]} is a commutative ring with respect to the binary operation addition modulo and multiplication modulo $+4, X_4$.

Z_u = {[0], [1], [2], [3]} என்ற கணமானது ஈருறுப்பு செயலியான கூட்டல் மட்டு மற்றும் பெருக்கல் மட்டு $+4, X_4$ ஆகியவற்றைப் பொறுத்து ஒரு பரிமாற்ற வளையம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

---

17. Prove that the order of a subgroup of a finite group divides the order of the group.

ஒரு முடிவுறு குலத்தின் உட்குலத்தின் வரிசையானது குலத்தின் வரிசையைப் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.

18. Let $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ and $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$

be a permutation of A.

(a) Write P as a product of disjoint cycles.

(b) Compute P^{-1}

(c) Compute P^2

(d) Find the period of 'P' that is the smallest positive integer 'K' such that $p^K=1_A$.

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ மற்றும் $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$

A இன் வரிசை மாற்றமாக இருக்கும் எனில்

(அ) P யை பெருக்கலின் பிரித்தல் சுழற்சியாக எழுது.

(ஆ) கணிக்க : P^{-1}

(இ) கணிக்க : P^2

(ஈ) $p^K=1_A$ போன்று மிகச்சிறிய நேர்மறை முழு எண் 'K' ஆக இருக்கும் எனில் 'P' இன் காலத்தைக் கண்டறி.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Is the union of two subgroups of a group, a subgroup of G? Justify your answer.

ஒரு குலத்தின் இரண்டு உட்குலத்தின் சேர்ப்பு, G இன் உட்குலமா? உங்கள் பதிலை கூறுக.

Or

(b) If any group $(G,*)$, show that $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

$(G,*)$ ஏதேனும் ஒரு குலம் எனில் $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$ காட்டுக.

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

12. (a) Prove that intersection of two normal subgroups is a normal group.

இரண்டு நேர்மை உட்குலத்தின் குறுக்குவெட்டு ஒரு நேர்மைக் குலம் என்பதை நிரூபிக்க.

Or

(b) If 'f' is a homomorphism of G onto G' with Kernal 'K'. Then prove that $G/K\cong G'$.

'f' என்பது G யிலிருந்து G' க்கான மேல்சார்பு செயல்மாறாக் கோர்த்தல் மற்றும் 'K' ஆனது உட்கரு எனில் $G/K\cong G'$ என நிறுவுக.

13. (a) State and prove Cayley's theorem.

கேலியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) If $x = (1,2,3),\ y = (2,4,3) z = (1,3,4)$ then show that $xyz = 1$.

$x = (1,2,3),\ y = (2,4,3) z = (1,3,4)$ என்றால் $xyz = 1$ என்று காட்டு.

14. (a) Let $(R,+,.)$ be a ring, then

(i) $a.0 = 0.a = 0$, for every $a \in R$.

(ii) $a.(-b) = (a.b) = (-a).b$ for all $a,b \in R$.

$(R,+,.)$ வளையம், எனில்

(i) $a.0 = 0.a = 0$, for every $a \in R$.

(ii) $a.(-b) = (a.b) = (-a).b$ for all $a,b \in R$ என நிறுவுக.

Or

(b) A commutative ring $(R,+,.)$ is an integral domain iff the cancelation laws hold in 'R'.

ஒரு பரிமாற்ற வளையம் $(R,+,.)$ என்பது 'R' இல் உள்ள ரத்துச் சட்டங்கள் ஒரு எண் அரங்கம் ஆகும் எனக் காட்டுக.

15. (a) Show that $(Z,+,X)$ is an integral domain where Z is set of all integers.

Z என்பது அனைத்து முழு எண்களின் தொகுப்பு எனில் $(Z,+,X)$ என்பது ஒரு எண் அரங்கம் என்பதைக் காட்டுக.

Or



(b) Show that the quotient ring $\frac{R}{1} = \frac{z}{nz}$ is isomorphic to Z_n iif $R = Z$ and $I = nZ$ for some $n > 1$.

சில >1க்கு $R = Z$ மற்றும் $I = nZ$ எனில் $\frac{R}{1} = \frac{z}{nz}$ என்ற கோட்பாட்டின் பகுவளையம் Z_n-க்கு சம ஒப்புமை எனக் காட்டுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If 'a' and 'b' are any two elements of a group $(G,*)$ then show that G is an abelian group iff $(a*b)^2 = a^2 * b^2$.

'a' மற்றும் 'b' ஒரு குலத்தின் ஏதேனும் இரண்டு உறுப்புகள் $(G,*)$ எனில் G என்பது ஒரு பரிமாற்றுக் குலம் என்றால் மற்றும் இருந்தால் மட்டுமே $(a*b)^2 = a^2 * b^2$ ஆக இருக்கும் எனக் காட்டுக.